



# **RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS CORTE 1**

---

**Elaborado por:**  
**2200293 – Jhan Carlos Matajira Figueroa**

**Ejercicios 1-7**

**Temas**

**Equilibrio en 3D, 2D**

**Revisión**  
**HOMER ARMANDO BUELVAS MOYA**


**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**Estática – 23018**

**Grupo**

**Escuela de Ingeniería Civil**

**2024**

 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

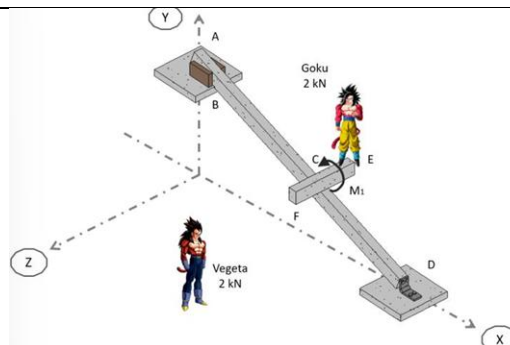
## EJERCICIO 1

Una viga AD de concreto simple ( $23 \frac{KN}{m^3}$ ) de  $200 \times 300 \text{ mm}$  de sección transversal es apoyada al suelo mediante dos pedestales del mismo material en el sistema global cartesiano como se observa en la **Figura 1**. Encima de la viga expuesta (en C) se construye monolíticamente otra viga EF de la misma tipología, pero de solo  $1.5m$  de longitud, donde Goku (Dragón Ball – la serie) se apoya con su peso y genera al mismo tiempo un momento torsor arbitrario  $M_1 = [0, 0, 10] KN.m$ . Si considera el instante de tiempo donde Goku y Vegeta se apoyan en E y F respectivamente, según la **Figura 2**, determine:

- El par fuerza generado por  $M_1$  y los pesos de la viga EF (en C).
- Las fuerzas en el apoyo del punto B (ubicado a  $0.55m$  en planta del borde de la viga (en A)).
- Las reacciones generadas en el apoyo D.

**Figura 1**

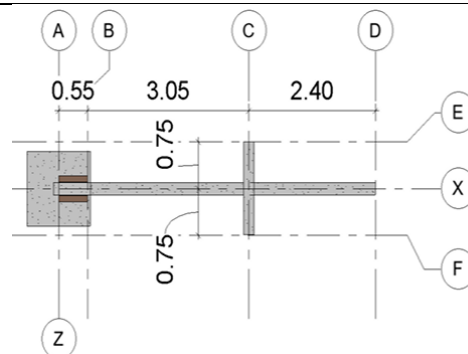
Viga inclinada de concreto.





Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

**Figura 2**

Vista planta de viga en pedestales.



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

- Nota 1: La altura del punto D es  $+0.5m$ , la altura del punto C es  $+1.65m$  encima de la viga AD, y la altura del punto B es  $+2.5m$ .
- Nota 2: A los pedestales se les hace arreglos constructivos para no generar empotramientos.
- Nota 3: Ambas vigas tienen peso a considerar en el ejercicio.

### Solución 1

Interpretando el ejercicio vemos que la viga AD está siendo sometida por el peso de Goku y Vegeta además del momento  $M_1$ , el peso propio de la viga EF y su propio peso. Por lo que, podríamos esperar que los apoyos A y D probablemente tiendan a girar y desplazarse en sentido contrario a las fuerzas a las que está sometida.

Por otro lado, podemos observar en la **Figura 2** que el ejercicio se puede resolver en 2D en el plano XY debido a la simetría que hay de sus cargas y su distribución de geometría. Para poder resolverlo en 2D sería necesario generar un sistema equivalente por fuerza en el punto C el cual es el que conecta la viga AD con la viga EF (transferencia de cargas).

#### 1.1. Identificación de apoyos


En la **Figura 1** se puede identificar que en el apoyo B existen unos tipos de topes donde no se garantiza una restricción en el eje Y positivo, en otras palabras, identificamos un apoyo de primer grado (1 reacción). En el apoyo D se puede observar una especie de bisagra por lo cual es un apoyo de segundo grado (2 reacciones en 2D y 5 en 3D).

#### 1.2. Determinación del Par fuerza en C

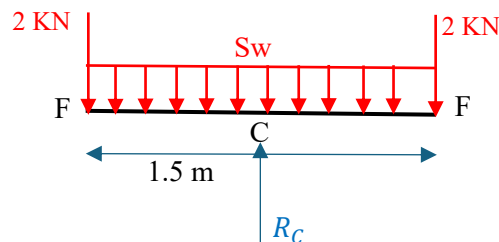
Como debemos obtener el Par fuerza en el punto C (es decir hallar el momento y la fuerza en C). Utilizaremos la ecuación de momento y sumatoria de fuerzas en el eje Y.

Ahora nos preguntamos, ¿Por qué debemos obtener el par fuerza en c? Esto se debe a que queremos realizar un sistema equivalente el cual no me altere el ejercicio, pero si me lo simplifique. Ya que debemos mover las cargas de Goku y Vegeta fuera de su línea de acción (trasladarla a C), es por esto por lo que se genera un momento y se traslada la fuerza.

Realizando un DCL de la viga EF en el plano ZY como se observa en la Figura 3. Vemos que el peso de Goku genera un momento en sentido horario de magnitud  $M_G = 2 * -0.75 = -1.5KN.m$  y el peso de Vegeta genera un momento en sentido antihorario de magnitud  $M_V = 2 * 0.75 = 1.5KN.m$ . Por lo que estas dos tendencias de giro se ven contrarrestadas entre sí.

<div><div>Universidad Industrial de Santander</div><div></div><div>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</div></div>	TRABAJO#	-	FECHA	01/10/2024
	ENTREGADO A	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	ASIGNATURA	ESTÁTICA		
	TEMA	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		
MEMORIA DE CÁLCULO				

**Figura 3**  
DCL Viga EF



Nota. Autoría propia.

Hallando la Reacción en C (Resultante en C):

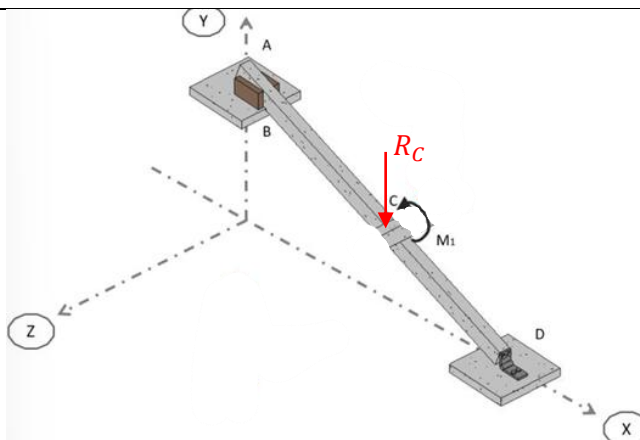
$$\sum F_y = 0 \quad - 2\text{KN} - 2\text{KN} - \left(23 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3} * 0.2\text{m} * 0.3\text{m}\right) * 1.5\text{m} + R_C = 0$$

$$R_C = 6.07 \text{ KN}$$


Cómo ya se ha mencionado los momentos (par de fuerza) en el eje X generados por las cargas de 2KN se contrarrestan entre sí y no se genera un momento por si propio peso debido a que la puntual de dicha fuerza pasa por el mismo punto C (mitad de la viga EF). Por lo que en el punto C solamente va a actuar el momento M1.

Finalmente, en la **Figura 4** se puede observar el par Fuerza generado por M1 y pesos de la viga EF en el punto c.

**Figura 4**  
Viga inclinada de concreto.



Nota. La resultante va hacia abajo debido a la tercera ley de Newton al trasferir la reacción mostrada en la Figura 3 a la viga AD. Fuente: Autoría propia.

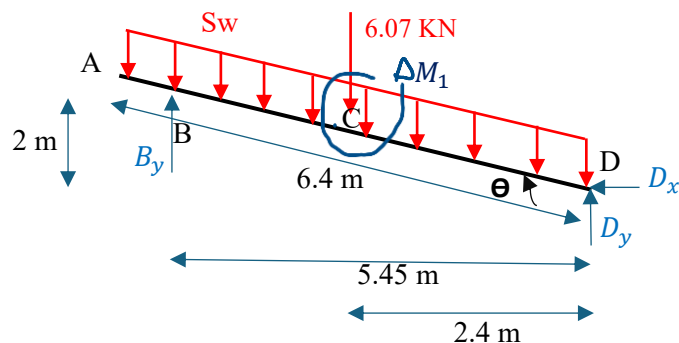
 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### 1.3. Determinación de las reacciones en el punto B y D.

Realizando el DCL de la viga AD en el plano XY teniendo en cuenta su longitud de  $6.4m$  y las fuerzas transferidas en el inciso anterior y de su propio peso. Se procede a realizar equilibrio externo en sus dos apoyos. Donde comenzaremos realizando sumatoria de momentos del eje Z en el punto D, ya que al realizar momentos en este punto no consideraremos las incógnitas (reacciones) que pasan por el punto D para posterior a esto utilizar sumatoria de fuerzas.

**Figura 5**

DCL Viga AD



Nota. Autoría propia.

Sacando el ángulo  $\theta$  mostrado en la **Figura 5** con la relación de la altura entre BD y distancia horizontal entre BD.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{5.45} = 20.15^\circ \quad M_1 = 10 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow 6.07 \text{ kN} * 2.4 \text{ m} + \left( 23 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 0.2 \text{ m} * 0.3 \text{ m} \right) * 6.4 \text{ m} * \frac{6.4}{2} \text{ m} * \cos(\theta) + M_1 - B_y * 5.45 \text{ m} = 0$$

$$B_y = 9.38 \text{ kN}$$

RESPUESTA


$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + D_y - 6.07 \text{ kN} - \left( 23 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 0.2 \text{ m} * 0.3 \text{ m} \right) * 6.4 \text{ m} = 0$$

$$D_y = 5.52 \text{ kN}$$

RESPUESTA

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x = 0$$

RESPUESTA

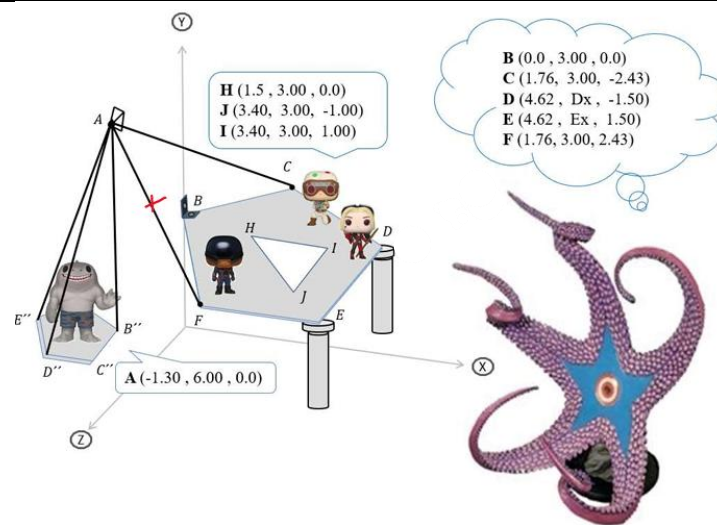
<div><div>Universidad Industrial de Santander</div><div></div><div>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</div></div>	TRABAJO#	-	FECHA	01/10/2024
	ENTREGADO A	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	ASIGNATURA	ESTÁTICA		
	TEMA	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		
MEMORIA DE CÁLCULO				

## EJERCICIO 2

Una estructura de cubierta de 10kN de peso en forma de pentágono con un vacío/orificio triangular sirve como base para que el escuadrón suicida (los sobrevivientes) ataquen al gran Starro. En un instante de la batalla Starro logra cortar el cable AF y la estructura sólo queda con apoyos en B, C, D y E , aparentemente dejando la estructura en equilibrio. ¿La habrá dejado estable?

**Figura 1**

Viga inclinada de concreto.



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016



Determine el equilibrio completo de la estructura ABCDEF y los efectos arbitrarios incluyendo el peso propio de la cubierta de 10 kN y que considere que el cable AF no aplica ninguna tensión.

### Solución 2

#### 2.1. Identificación de apoyos

Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que la estructura a analizar se trata de una estructura hiperestática debido a que tiene 2 apoyos simples en E y D, así como un apoyo articulado en B y 2 cables que llegan a la estructura BCDEF en los puntos C y F por lo cual tenemos dos apoyos simples adicionales.

Teniendo en cuenta que Starro corta el cable AF y que el ejercicio se resolverá en 3D debido a que no hay forma de simplificar el ejercicio en 2D ya que no tiene simetría el ejercicio en sus cargas ni geometría. Finalmente, el GIE de nuestra estructura BCDEF queda:

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

- Cable (1 reacción)
- Apoyos sobre columna (1 reacción)
- Bisagra (3 reacciones)

$$GIE = 6 - 6 = 0$$

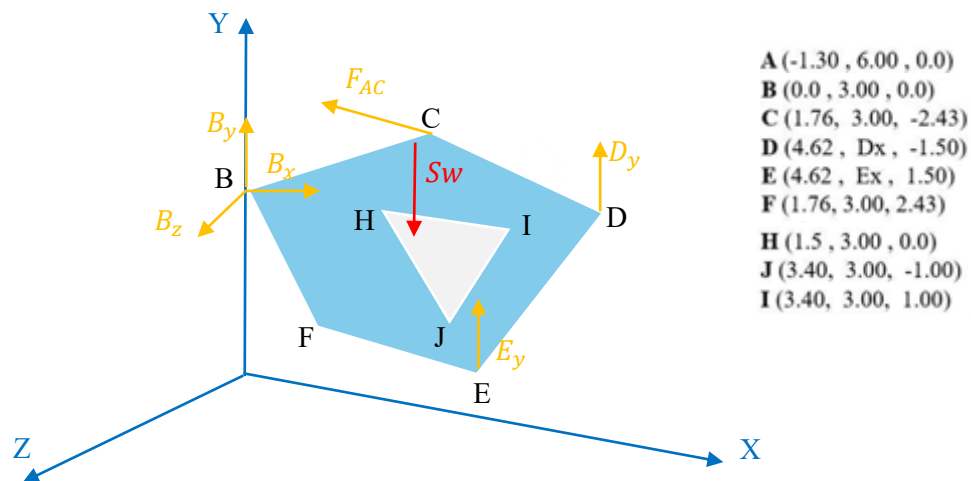
Por lo que podemos clasificar la estructura como isostática y podemos observar en la **Figura 1** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes.

## 2.2. DCL

Realizamos el DCL del ejercicio en 3D ya que Starro cortó el cable AF haciendo que el ejercicio pierda su simetría por lo que solamente se podrá resolver en 3D. En la **Figura 2** se mostrará el DCL de la estructura en estudio (Placa BCDEF).

**Figura 2**


Viga inclinada de concreto.



Nota. Reacciones (Amarillo), Fuerzas externas (rojo). Fuente: Autoría propia.

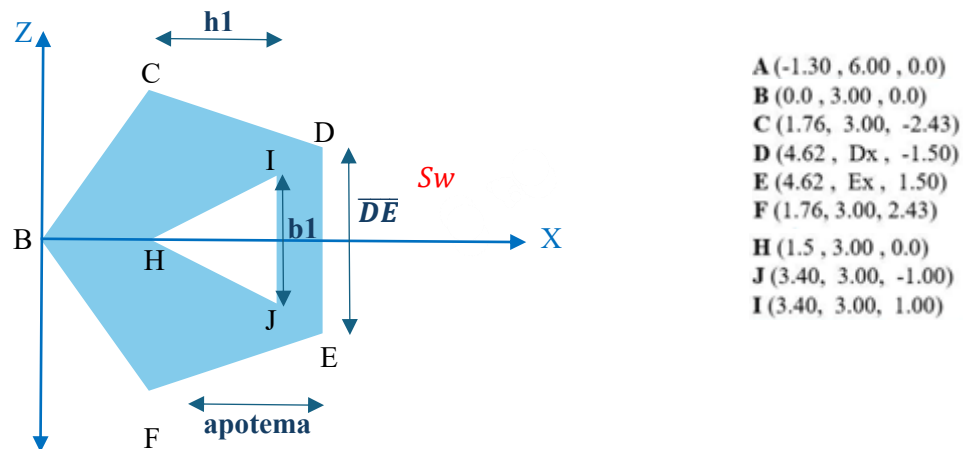
## 2.3. HALLAMOS CENTROIDE

Realizaremos una vista en planta (plano XZ) para poder ver de mejor manera las distancias y geometría de la placa BCDEF para posterior a ello hallar el centroide ya que en este punto es donde va a estar ubicada la carga puntual de peso propio “Sw”.

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Figura 3**

Viga inclinada de concreto.



Nota. Reacciones (Amarillo), Fuerzas externas (rojo). Fuente: Autoría propia.

Hallando  $\overline{DE} = 1.5 - (-1.5) = 3\text{m}$  para poder determinar la apotema del pentágono y posterior a ello su área.

$$Apotema = \frac{\frac{\overline{DE}}{2}}{\tan 36} = 2.06\text{ m} \quad b1 = 2\text{m} \quad h1 = 3.4 - 1.5 = 1.9\text{m}$$

**Centroidito pentágono (Promedio coordenadas)**

$$\left( \frac{0 + 1.76 + 4.62 + 4.62 + 1.76}{5}, \frac{3 + 3 + 3 + 3 + 3}{5}, \frac{0 + (-2.43) + (-1.5) + 1.5 + 2.43}{5} \right)$$

(2.552, 3, 0)

**Centroidito triangulo (Promedio coordenadas)**



$$\left( \frac{1.5 + 3.4 + 3.4}{3}, \frac{3 + 3 + 3}{3}, \frac{0 + (-1) + 1}{3} \right)$$

(2.77, 3, 0)

**Área del pentágono**

$$A_{pent} = \frac{3}{2} \times \overline{DE} \times Apotema = \frac{3}{2} \times 3\text{m} \times 2.06\text{m} = 9.27\text{m}^2$$



  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### Área del triángulo (hueco)

$$A_{pent} = -\frac{b1 \times h1}{2} = -\frac{2m \times 1.9m}{2} = -1.9m^2$$

Con las distancias centroidales y áreas de las dos figuras que componen nuestra estructura de estudio. Procedemos a utilizar la ecuación  $\frac{\sum xA}{\sum A} = \bar{x}$  para hallar el centroide de la estructura BCDEF.

$$\bar{x} = \frac{9.27m^2 \times 2.552m - 1.9m^2 \times 2.77m}{9.27m^2 - 1.9m^2} = 2.49m$$

$$\bar{y} = \frac{9.27m^2 \times 3m - 1.9m^2 \times 3m}{9.27m^2 - 1.9m^2} = 3m$$

$$\bar{z} = \frac{9.27m^2 \times 0m - 1.9m^2 \times 0m}{9.27m^2 - 1.9m^2} = 0m$$

Con las coordenadas del centroide encontradas podemos realizar el equilibrio 3D de la estructura donde debemos determinar cada uno de los vectores teniendo en cuenta que vamos a realizar sumatoria de momentos en el punto más crítico (con más reacciones) es decir, el punto B y posterior a esto aplicaremos las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

### 2.4. VECTORES

$$\overrightarrow{T_{CA}} = T \times \widehat{U_{CA}}$$


$$\widehat{U_{CA}} = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{CA} = \frac{[(-1.3 - 1.76), (6 - 3), (0 - (-2.43))]}{\sqrt{(-1.3 - 1.76)^2 + (6 - 3)^2 + (0 - (-2.43))^2}}$$

$$\widehat{U_{CA}} = \frac{(-3.06, 3, 2.43)}{5.72} = (-0.53, 0.52, 0.42)$$

$$\overrightarrow{T_{CA}} = T \times (-0.53, 0.52, 0.42)$$

Peso propio de la cubierta ( $\overrightarrow{S_w}$ )

$$\overrightarrow{S_w} = (0, -10, 0)$$

 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Vectores posición

$$\overrightarrow{BC} = [(1.76 - 0), (3 - 3), (-2.43 - 0)] = (1.76, 0, -2.43)$$

$$\overrightarrow{BD} = [(4.62 - 0), (3 - 3), (-1.5 - 0)] = (4.62, 0, -1.5)$$

$$\overrightarrow{BE} = [(4.62 - 0), (3 - 3), (1.5 - 0)] = (4.62, 0, 1.5)$$

$$\overrightarrow{BG} = [(2.49 - 0), (3 - 3), (0 - 0)] = (2.49, 0, 0)$$

Finalmente realizamos momento en B respecto a cada una de las fuerzas.

**Momentos respecto a B**

$$\sum \vec{M}_B = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{T_{CA}} + \overrightarrow{BG} \times \overrightarrow{S_w} + \overrightarrow{BD} \times D_y + \overrightarrow{BE} \times E_y$$

$$\sum \vec{M}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.76 & 0 & -2.43 \\ -T \cdot 0.53 & T \cdot 0.52 & T \cdot 0.42 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.49 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4.62 & 0 & -1.5 \\ 0 & D_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4.62 & 0 & 1.5 \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_B = (1.2636 T + 1.5 D_y - 1.5 E_y) i + (0.5487 T) j + (0.9152 T - 24.9 + 4.62 D_y + 4.62 E_y) k$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio

**Equilibrio en 3D**

$$\sum M_x = 0 \rightarrow 1.2636 T + 1.5 D_y - 1.5 E_y = 0$$



$$\sum M_y = 0 \rightarrow 0.5487 T = 0$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow 0.9152 T - 24.9 + 4.62 D_y + 4.62 E_y = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x - 0.53 T = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + E_y + D_y + 0.52 T - 10 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow B_z + 0.42 T = 0$$

  <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		


### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 6x6 los resultados se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 T &= 0 \text{ KN} \\
 B_x &= 0 \text{ KN} \\
 B_z &= 0 \text{ KN} \\
 D_y &= 2.69 \text{ KN} \\
 E_y &= 2.69 \text{ KN} \\
 B_y &= 4.62 \text{ KN}
 \end{aligned}$$

### Análisis de resultados

Se garantiza que la estructura es completamente restringida y determinada. Además, sus reacciones generan restricción a movimientos en todos los ejes por lo que la hace una estructura estable a pesar de que Starro cortara el cable AF. Al no existir tensión en el cable AC no se generan fuerzas en el eje “z” y “y”, por lo cual la estructura estará siendo solamente sometida a fuerzas gravitacionales soportadas por sus demás apoyos. Adicional a esto, que el cable AC no tenga tensión indica que la estructura se puede sostener por si sola sin ayuda de ese elemento estructural.

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### EJERCICIO 3

Con el fin de realizar un arreglo al lavaplatos de una casa vecina, Mario debe saltar un muro YZ y una viga ligeramente inclinada como se observa en la **Figura 1**. En un instante de tiempo donde Mario está en el extremo de la viga existe un miedo a la inestabilidad de la estructura, por lo cual, Luigi decide calcular un par equivalente en A de  $73.46 \text{ KN} - m$ , pero desconoce otras variables que le pide ayuda a los estudiantes de la UIS:

- La densidad específica en  $\text{kN.m}^3$  de la viga AB si considera una sección transversal de  $0.2 \times 0.2 \text{ m}$
- Las reacciones generadas en la viga AB.

**Figura 1**

Viga inclinada de concreto.

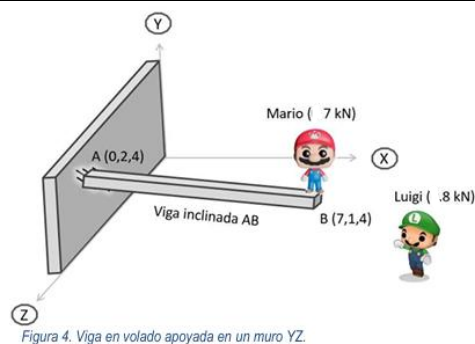


Figura 4. Viga en volado apoyada en un muro YZ.

Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

### Solución 3

#### 3.1. Identificación de apoyos



Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que la estructura a analizar se trata de una viga isostática debido a que esta empotrada en el punto A. También debemos tener en cuenta que la viga está inclinada ligeramente en Y cómo se muestra en la **Figura 1**.

Teniendo en cuenta que Mario está apoyando en B y que el ejercicio se resolverá en 2D debido a que hay forma de simplificar el ejercicio en 2D ya que el ejercicio tiene simetría en sus cargas y geometría. Finalmente, el GIE de nuestra viga queda:

- Empotramiento (3 reacciones)

$$GIE = 3 - 3 = 0$$

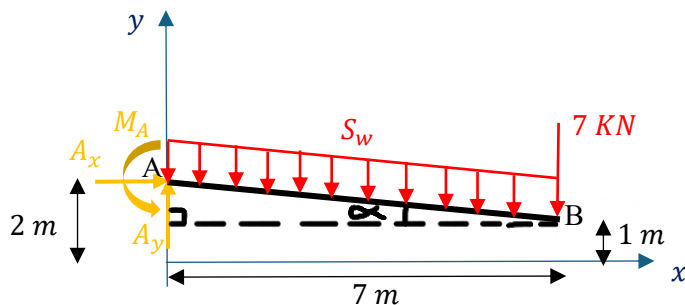
Por lo que podemos clasificar la estructura como isostática y podemos observar en la **Figura 2** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes.

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### 3.2. DCL

**Figura 2**

DCL Viga AB



Nota. Reacciones (Amarillo), Fuerzas externas (rojo). Fuente: Autoría propia.

### 3.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO

Antes de realizar equilibrio estático debemos definir el punto donde vamos a realizar momentos para hallar las demás reacciones teniendo en cuenta el par equivalente en A (Asumiendo que es negativo), el peso propio de la viga y el de Mario en el punto B. Dicho esto, vamos a realizar momentos en el apoyo más crítico el cual es el apoyo A.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 15.95^\circ$$

$$L_{Viga} = \sqrt{2^2 + 7^2} = 7.28 \text{ m}$$

El par equivalente en A será igual a la reacción de momento en A pero en sentido contrario.

**Momentos respecto a el punto A** 73.46 kN - m

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - 7 \text{ kN} \times 7 \text{ m} - S_w \times 7.28 \text{ m} \times \frac{7.28 \text{ m}}{2} \times \cos(15.95) = 0$$

$$S_w = 0.96 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 7 \text{ kN} - S_w \times 7.28 \text{ m} = 0$$

Teniendo en cuenta que la sección transversal de la viga es  $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$  hallamos la densidad específica de la viga.

$$S_w = D \times 0.2^2 \text{ m}^2 \rightarrow D = 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$


#### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 3x3 los resultados se presentan a continuación:

$$M_A = 73.46 \text{ kN} - \text{m}$$

$$A_y = 13.98 \text{ kN}$$

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

<div><div>Universidad Industrial de Santander</div><div></div><div><div>ESCUELA DE INGENIERIA</div><div>Civil</div></div></div> <div>MEMORIA DE CÁLCULO</div>	TRABAJO#	-	FECHA	01/10/2024
	ENTREGADO A	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	ASIGNATURA	ESTÁTICA		
	TEMA	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

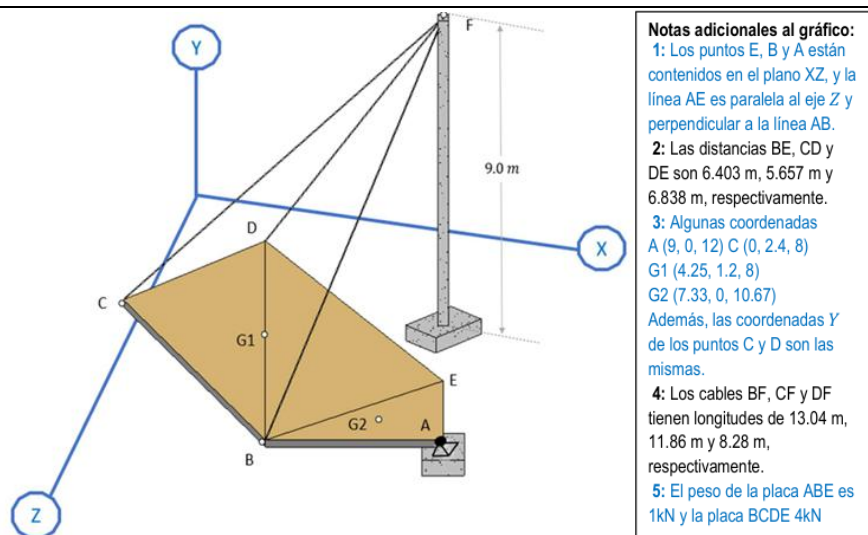
## EJERCICIO 4

Una placa rígida y monolítica de doble inclinación debe ser soportada por un apoyo en A y tres cables/eslabones conectados al punto F, el cual está en una columna vertical (paralela al eje Y) a 9 m de altura respecto del plano XZ. Teniendo en cuenta que conoce las coordenadas de algunos puntos de la placa (revise las notas que están en la parte lateral), plantee una solución numérica que sustente el equilibrio o la tendencia a movimiento del sistema y determine:

- Las coordenadas de los puntos B, D y E de la placa.
- La tensión de los cables BF, CF y DF. Indique si recomienda reemplazarlos por eslabones.

**Figura 1**

Cubierta tipo a doble inclinación



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

## Solución 4



### 4.1. Identificación de apoyos

Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que el ejercicio a realizar se trata de una estructura isoestática debido a que tiene 3 cables (apoyos simples) en C, B y D, así como un apoyo articulado en A.

Teniendo en cuenta que el ejercicio se resolverá en 3D debido a que no hay forma de simplificar el ejercicio en 2D ya que no tiene simetría el ejercicio en sus cargas ni geometría. Finalmente, el GIE de nuestra estructura BCDEF queda:

- 3 cables (cada uno de 1 reacción)
- Bisagra (3 reacciones)

$$GIE = 6 - 6 = 0$$

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

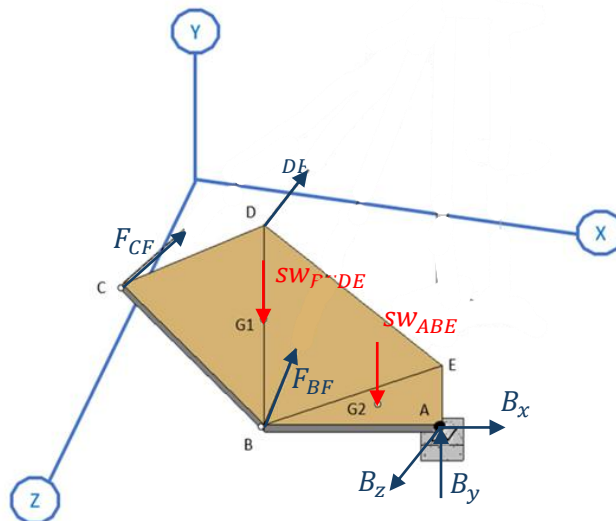
Por lo que podemos clasificar la estructura como isostática y podemos observar en la **Figura 2** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes.

#### 4.2. DCL

Realizamos el DCL del ejercicio en 3D ya que el ejercicio no tiene simetría ni en sus cargas, geometría ni en sus reacciones por lo que solamente se podrá resolver en 3D. En la **Figura 2** se mostrará el DCL de la estructura en estudio (Placa ABCDE).

**Figura 2**



DCL en 3D



Nota. Reacciones en azul oscuro, cargas externas en rojo. Fuente: Autoría propia.

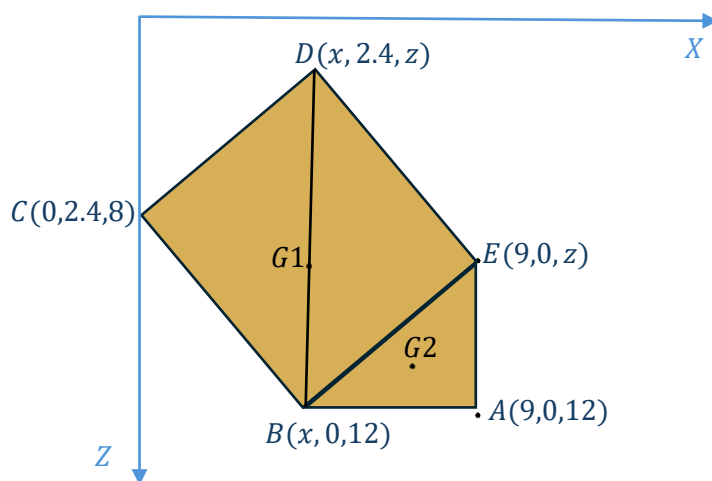
#### 4.3 REUNIMOS INFORMACIÓN IMPORTANTE

Realizaremos una vista en planta (plano XZ) para poder ver de mejor manera las distancias, coordenadas y geometría de la placa ABCDE para posterior a ello por medio del centroide de cada placa ya dadas poder hallar las coordenadas faltantes ya que en este punto es donde va a estar ubicada la carga puntual de peso propio “Sw” de cada una de las placas que forman toda la estructura.

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Figura 3**

Vista XZ



Nota. Fuente: Autoría propia.

Como podemos notar en la Figura 3, vemos que la línea AE ser paralela al eje z podemos darnos cuenta fácilmente que el punto E y A tienen la misma coordenada en x. Además, al ser la línea AE perpendicular a la BA podemos intuir que la coordenada z es la misma para los dos puntos. Por último, los puntos A, B y E al estar contenidos en el mismo plano XZ podemos decir que tienen la misma coordenada en y.

#### Hallamos el centroide de la figura ABE (promedio de coordenadas)

Vamos a realizar el proceso de hallar el centroide de cada figura que compone la estructura ABCDE para poder seguir descubriendo las coordenadas faltantes teniendo en cuenta que ya tenemos los valores del centroide de la figura y despejando la incógnita.

$$\left( \frac{x + 9 + 9}{3} = 7.33, 0, \frac{12 + 12 + z}{3} = 10.67 \right)$$

$$x = 4 \text{ m} \quad z = 8 \text{ m}$$



#### Hallamos el centroide de la figura BCDE (promedio de coordenadas)

Vamos a realizar el proceso descrito anteriormente, pero para la figura BCDE que compone parte de la estructura ABCDE para poder seguir descubriendo las coordenadas faltantes teniendo en cuenta que ya tenemos los valores del centroide de la figura y despejando la incógnita.

$$\left( \frac{x + 0 + 4 + 9}{4} = 4.25, \frac{2.4 + 2.4 + 0 + 0}{4} = 1.2, \frac{z + 8 + 8 + 12}{4} = 8 \right)$$

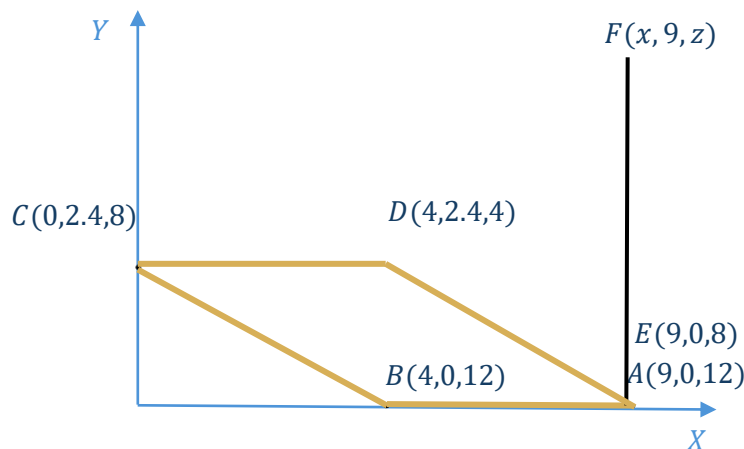
$$x = 4 \text{ m} \quad z = 4 \text{ m}$$



  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Figura 4**

Vista XY



Nota. Fuente: Autoría propia.

Ahora para encontrar las coordenadas de F. Vamos a resolver un sistema de ecuaciones de 2x2 con el teorema de Pitágoras en 3D. Donde desconocemos las variables de x y z de nuestro punto F, pero conocemos los demás puntos y el valor de la hipotenusa.

**Para el cable CF**

$$11.86 \text{ m} = \sqrt{(x - 0)^2 + (9 - 2.4)^2 + (z - 8)^2}$$

**Para el cable DF**

$$8.28 \text{ m} = \sqrt{(x - 4)^2 + (9 - 2.4)^2 + (z - 4)^2}$$

Resolviendo el anterior sistema 2x2



$$x = 9 \text{ m} \quad z = 4 \text{ m}$$

Con las coordenadas encontradas podemos realizar el equilibrio 3D de la estructura donde debemos determinar cada uno de los vectores teniendo en cuenta que vamos a realizar sumatoria de momentos en el punto más crítico (con más reacciones) es decir, el punto A y posterior a esto aplicaremos las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

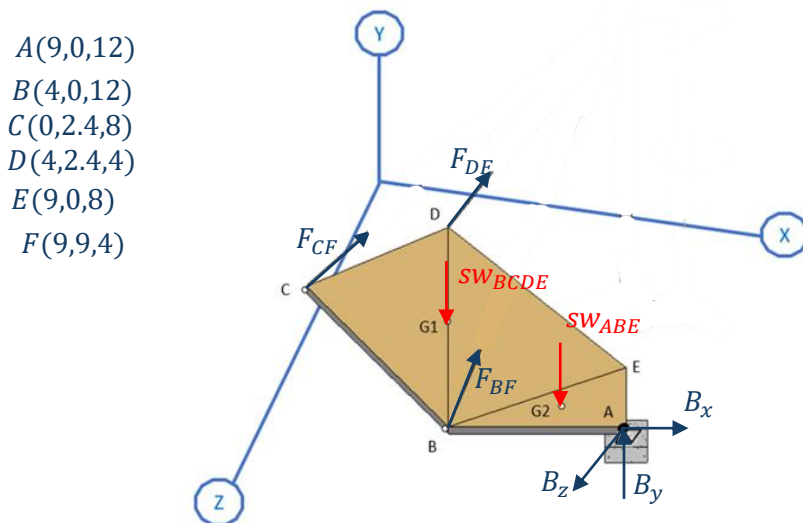
#### 4.4. VECTORES

Primero presentaré todas las coordenadas halladas en el DCL.

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Figura 5**

DCL en 3D



Nota. Fuente: Autoría propia.

**Cable  $F_{CF}$**

$$\vec{F}_{CF} = F_{CF} \times \widehat{U}_{CF}$$

$$\widehat{U}_{CF} = \frac{\vec{C} - \vec{F}}{CF} = \frac{[(9 - 0), (9 - 2.4), (4 - 8)]}{11.86}$$

$$\widehat{U}_{CF} = \frac{(9, 6.6, -4)}{11.86} = (0.76, 0.56, -0.34)$$

$$\vec{F}_{CF} = F_{CF} \times (0.76, 0.56, -0.34)$$


**Cable  $F_{DF}$**

$$\vec{F}_{DF} = F_{DF} \times \widehat{U}_{DF}$$

$$\widehat{U}_{DF} = \frac{\vec{D} - \vec{F}}{DF} = \frac{[(9 - 4), (9 - 2.4), (4 - 4)]}{8.28}$$

$$\widehat{U}_{DF} = \frac{(5, 6.6, 0)}{8.28} = (0.60, 0.8, 0)$$

$$\vec{F}_{DF} = F_{DF} \times (0.60, 0.8, 0)$$

 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Cable  $F_{BF}$

$$\vec{F}_{BF} = F_{BF} \times \hat{U}_{BF}$$

$$\hat{U}_{BF} = \frac{\vec{B} - \vec{F}}{BF} = \frac{[(9 - 4), (9 - 0), (4 - 12)]}{13.04}$$

$$\hat{U}_{BF} = \frac{(5, 9, -8)}{13.04} = (0.38, 0.69, -0.61)$$

$$\vec{F}_{BF} = F_{BF} \times (0.38, 0.69, -0.61)$$

Peso propio de la cubierta ( $\overrightarrow{SW_{BCDE}}$ )

$$\overrightarrow{SW_{BCDE}} = (0, -4, 0)$$

Peso propio de la cubierta ( $\overrightarrow{SW_{ABE}}$ )

$$\overrightarrow{SW_{ABE}} = (0, -1, 0)$$

Vectores posición

$$\vec{AC} = [(0 - 9), (2.4 - 0), (8 - 12)] = (-9, 2.4, -4)$$

$$\vec{AD} = [(4 - 9), (2.4 - 0), (4 - 12)] = (-5, 2.4, -8)$$

$$\vec{AB} = [(4 - 9), (0 - 0), (12 - 12)] = (-5, 0, 0)$$

$$\vec{AG1} = [(4.25 - 9), (1.2 - 0), (8 - 12)] = (-4.75, 1.2, -4)$$



$$\vec{AG2} = [(7.33 - 9), (0 - 0), (10.67 - 12)] = (-1.67, 0, -1.33)$$

Finalmente realizamos momento en A respecto a cada una de las fuerzas.

Momentos respecto a A

$$\sum \vec{M}_A = \vec{AC} \times \vec{F}_{CF} + \vec{AG1} \times \overrightarrow{SW_{BCDE}} + \vec{AG2} \times \overrightarrow{SW_{ABE}} + \vec{AD} \times \vec{F}_{DF} + \vec{AB} \times \vec{F}_{BF}$$

$$\sum \vec{M}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 2.4 & -4 \\ F_{CF} 0.76 & F_{CF} 0.56 & -F_{CF} 0.34 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4.75 & 1.2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1.67 & 0 & -1.33 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2.4 & -8 \\ F_{DF} 0.6 & F_{DF} 0.8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 0 & 0 \\ F_{BF} 0.38 & F_{BF} 0.69 & -F_{BF} 0.61 \end{vmatrix}$$

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$\sum \vec{M}_B = (1.424F_{CF} + 6.4F_{DF} - 17.33)i + (-6.1F_{CF} - 4.8F_{DF} - 3.05F_{BF})j + (-6.864F_{CF} - 5.44F_{DF} - 3.45F_{BF} + 20.67)k$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio

### Equilibrio en 3D

$$\sum M_x = 0 \rightarrow 1.424F_{CF} + 6.4F_{DF} - 17.33 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow -6.1F_{CF} - 4.8F_{DF} - 3.05F_{BF} = 0$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -6.864F_{CF} - 5.44F_{DF} - 3.45F_{BF} + 20.67 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + F_{CF} 0.76 + F_{DF} 0.6 + F_{BF} 0.38 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F_{CF} 0.56 + F_{DF} 0.8 + F_{BF} 0.69 - 4 - 1 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z - F_{CF} 0.34 - F_{BF} 0.61 = 0$$

### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 6x6 los resultados se presentan a continuación:

$$F_{CF} = -538.46 \text{ KN}$$


$$F_{DF} = 122.51 \text{ KN}$$

$$F_{BF} = 884.11 \text{ KN}$$

$$A_y = -401.5063 \text{ KN}$$

$$A_x = -0.2382 \text{ KN}$$

$$A_z = 356.23 \text{ KN}$$

 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

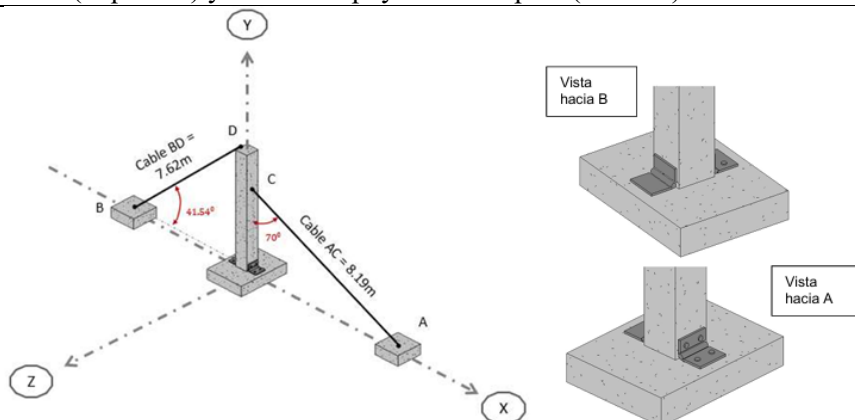
## EJERCICIO 5

Una columna de concreto ( $24 \frac{KN}{m^3}$ ) de  $600 \times 600 mm$  de sección transversal es anclada al suelo mediante dos cables del mismo material y un apoyo con pernos a una altura de  $0.45m$  mediante unas zapatas arriba del origen de un sistema global cartesiano como se observa en la **Figura 1**. En un instante de tiempo donde uno de los cables soporta su tensión máxima de  $10 kN$ , por lo que se le solicita:

- La tensión generada en los dos cables sin que estos superen los  $10 kN$  de fuerza.
- Las reacciones generadas en el apoyo de la columna sobre la zapata.

**Figura 1**

Columna en concreto(izquierda) y vistas de apoyo sobre zapata (derecha)



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

## Solución 5

### 5.1. Identificación de apoyos



Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que el ejercicio a realizar se trata de una columna hipostática en 3D debido a que tiene 2 cables (apoyos simples) en D y C, así como un apoyo articulado en la base de la columna. Además, podemos observar que el ejercicio perfectamente se puede analizar en 2D, ya que la estructura se contiene en el plano XY.

Teniendo en cuenta que el ejercicio se puede resolver tanto en 3D como en 2D debido a lo expresado anteriormente. Finalmente, el GIE tanto en 3D como en 2D de nuestra estructura a analizar (columna) queda:

- 2 cables (cada uno de 1 reacción)
- Bisagra (3 reacciones)

$$GIE_{3D} = 5 - 6 = -1$$

Por lo que podemos clasificar la estructura como hipostática en 3D y podemos observar en la **Figura 1** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes, así

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

como podremos obtener el valor de cada una de las reacciones que se encuentran en la estructura. Realizando el GIE en 2D:

- 2 cables (cada uno de 1 reacción)
- Bisagra (2 reacciones)

$$GIE_{2D} = 4 - 3 = 1$$

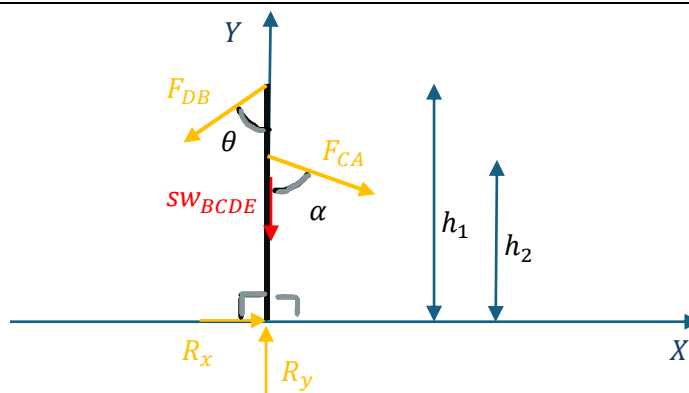
Por lo que podemos clasificar la estructura como hiperestática en 2D y podemos observar en la **Figura 2** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes. Además, teniendo en cuenta que en el enunciado del ejercicio nos piden que la tensión máxima en los cables no debe superar los 10 KN podemos usar esto a favor para a pesar de que es un ejercicio hiperestático en 2D poder hallar cada una de las reacciones que se encuentran en la estructura.

## 5.2. DCL

Realizamos el DCL del ejercicio en 2D ya que la estructura se encuentra contenida en el plano XY. En la **Figura 2** se mostrará el DCL del cuerpo en estudio (columna).

**Figura 2**

DCL en 2D




Nota. Fuente: Autoría propia.

Del DCL mostrado anteriormente podemos observar que al leer el enunciado y ver a **Figura 1** nos damos cuenta de que las zapatas en las que están apoyadas cada uno de los elementos estructurales son de igual altura por lo que en el DCL podremos simplificarlos. Asimismo, podemos ver que podemos hallar los respectivos ángulos teniendo en cuenta que se forma un triángulo rectángulo entre los cables y la columna, así como podremos hallar la altura de la columna.

$$\theta + 90^\circ + 41.54^\circ = 180^\circ$$

$$\theta = 48.46^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ$$

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

Realizando Pitágoras con el cable BD y la columna podremos hallar la distancia  $h_1$  ya que se forma un triángulo rectángulo.

$$\cos \theta = \frac{h_1}{7.62} \rightarrow h_1 = 7.62 \cos 48.46^\circ = 5.05 \text{ m}$$

Realizando Pitágoras con el cable CA y la columna podremos hallar la distancia  $h_2$  ya que se forma un triángulo rectángulo.

$$\cos \alpha = \frac{h_2}{8.19} \rightarrow h_2 = 8.19 \cos 70^\circ = 2.80 \text{ m}$$

### 5.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO

Antes de realizar equilibrio estático debemos definir el punto donde vamos a realizar momentos y asumir uno de los dos cables con tensión igual a 10 KN ya que es la máxima que va a poder soportar cualquiera de los dos cables y es el estado más crítico en el que se puede encontrar la estructura. Teniendo en cuenta que debemos corroborar que ninguno de los 2 cables supere esta carga.

Vamos a realizar momentos en el apoyo más crítico el cual es el apoyo en la columna y tomaremos la fuerza del cable CA como 10KN debido a que este cable tiene mayor longitud lo que lo hace más rígido, es decir, capaz de soportar mayor carga.

**Momentos respecto a el apoyo de la columna.**

$$\sum M_{columna} = 0 \quad F_{DB} \sin(48.46^\circ) \times 5.05m - \overset{10 \text{ KN}}{F_{CA}} \sin(70^\circ) \times 2.8m = 0$$

$$F_{DB} = 6.96 \text{ KN}$$

Como dio positivo quiere decir que en la dirección que la dibujamos está bien, es decir, el cable está en tensión.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_x - F_{DB} \sin(48.46^\circ) + F_{CA} \sin(70^\circ) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y - F_{DB} \cos(48.46^\circ) - F_{CA} \cos(70^\circ) - 24 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3} \times 0.6^2 \text{ m}^2 \times 5.05m = 0$$

#### Hallando las reacciones


Resolviendo el sistema de ecuaciones de 3x3 los resultados se presentan a continuación:

$$F_{DB} = 6.96 \text{ KN}$$

$$R_y = 51.67 \text{ KN}$$

$$R_x = -4.19 \text{ KN}$$

El signo negativo quiere indicar que la reacción en x debe ir contraria a la que dibujamos en el DCL. Es decir, va hacia la izquierda. Por último, vemos que el cable de  $F_{CA}$  tendrá una fuerza de 10 KN y  $F_{DB}$  de 6,96 KN cumpliendo con que ninguno supere los 10 KN.

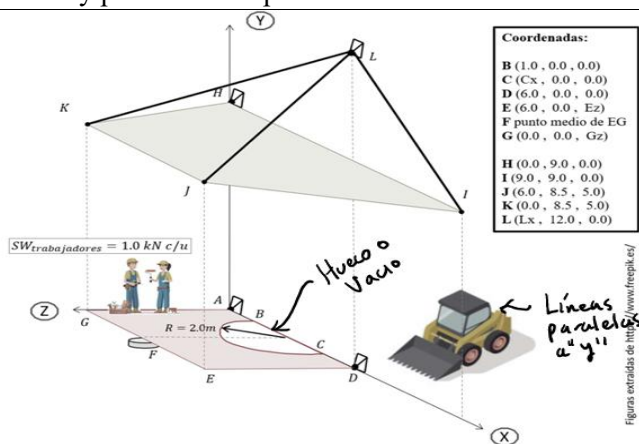
 <b>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</b> <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

## EJERCICIO 6

Un nivel de entrepiso es construido para una plazoleta publica con silletería fija para la adecuación de un local de café (peso de  $30\text{ kN}$ ), sin embargo, para que la plazoleta sea correctamente usada, también se ha construido una cubierta ( $7\text{ kN}$ ) un poco más grande que el entrepiso y con una ligera inclinación como se muestra en la **Figura 1**. Tenga en cuenta que los trabajadores se concentran en el centro de gravedad del entrepiso y resuelva el equilibrio completo del entrepiso y cubierta, y realice análisis de resultados final.

**Figura 1**

Estructura formada por cubierta y placa de entrepiso



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

## Solución 6

### 6.1. Identificación de apoyos

Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que el ejercicio a realizar se trata de dos estructuras en 3D. Donde podemos realizar un análisis por separado de la cubierta y el entrepiso. Donde vemos que la cubierta se debe analizar en 3D debido a que no hay simetría en sus apoyos. Asimismo, vemos que el entrepiso si se podrá analizar en 2D ya que tenemos simetría en apoyos, geometría y cargas.

Teniendo en cuenta que el ejercicio se puede resolver tanto en 3D como en 2D debido a lo expresado anteriormente. Finalmente, el GIE tanto en 3D como en 2D de nuestras estructuras a analizar queda:


### GIE ENTREPISO EN 3D

- rótula en A y D (3 reacciones cada una)
- apoyo simple en F (1 reacción)

$$GIE_{3D} = 7 - 6 = 1$$

Por lo que podemos clasificar la estructura como hiperestática en 3D y podemos observar en la **Figura 1** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes.



 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

#### GIE ENTREPISO EN 2D

- rótula en A y D (2 reacciones)
- apoyo simple en F (1 reacción)

$$GIE_{2D} = 3 - 3 = 0$$

Por lo que podemos clasificar la estructura como isostática en 2D y podemos observar en la **Figura 1** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes, probablemente se encuentre en equilibrio y podremos hallar el valor de cada una de sus reacciones al simplificarse en 2D.

#### GIE CUBIERTA EN 3D

- rótula en H (3 reacciones)
- Cables en K, J e I (1 reacción cada una)



$$GIE_{3D} = 6 - 6 = 0$$

Por lo que podemos clasificar la estructura como isostática en 3D y podemos observar en la **Figura 1** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes, probablemente se encuentre en equilibrio y podremos hallar el valor de cada una de sus reacciones.

### 6.2. Evaluación de cargas

ENTREPISO	CUBIERTA
L 3.0	L 0
Lr 0	Lr 0.5
D 2.8	D 0.08
G 0	G 1
W 0	W 0.4
Le 0	Le 0.1
$\overline{W_{s\_entrepiso}} = 5.8 \frac{KN}{m^2}$	$\overline{W_{s\_cubierta}} = 1.13 \frac{KN}{m^2}$

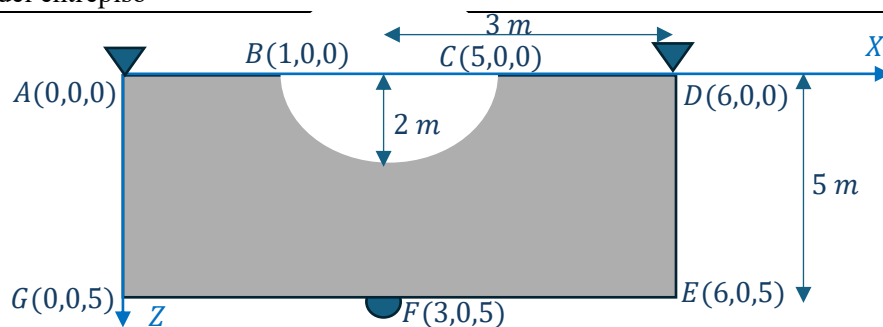
La evaluación de cargas anteriormente presentada se realizó mirando el título B de la NSR-10. Donde evaluamos los combos de servicio y se seleccionaron los más críticos (valor más grande). Donde para el entrepiso fue el combo 1 y para la cubierta el combo 4. Aclarando que esta carga de servicio ya considera el peso de los trabajadores al ser aún más crítica.

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### 6.3. Vista en planta del entrepiso y la cubierta

**Figura 2**

Vista en planta del entrepiso



Nota. Fuente: Autoría propia.

Las coordenadas faltantes como  $C_x$  la hallamos con la ayuda de la coordenada B y sumándole 2 veces el radio del círculo. Las coordenadas  $E_z$  y  $G_z$  con la ayuda de la **Figura 1** donde vemos que estos dos puntos tendrán las mismas coordenadas de X y Z que K y J.

#### Hallamos la carga de servicio del entrepiso

AREA ENTREPISO

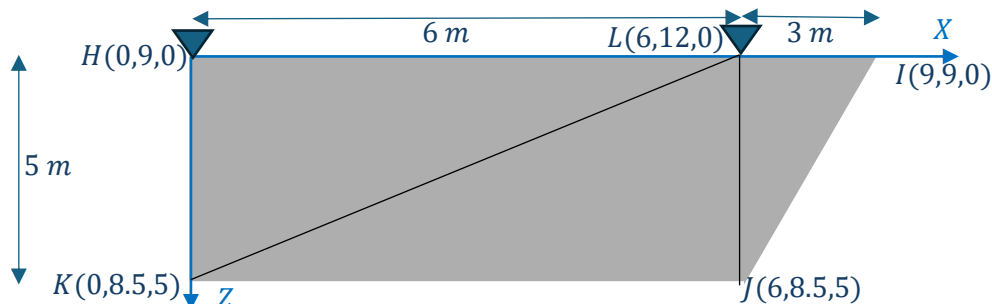
$$A = 6m \times 5m - \frac{\pi \times 2m^2}{2} = 23.717 m^2$$

CARGA DE SERVICIO DEL ENTREPISO

$$P_{serv\_entrepiso} = 23.717 m^2 \times 5.8 \frac{KN}{m^2} = 138.557 KN$$


**Figura 3**

Vista en planta de la cubierta



Nota. Fuente: Autoría propia.

Las coordenadas faltantes como  $L_x$  la hallamos con la ayuda de la coordenada D de la **Figura 1** donde vemos que estos dos puntos tendrán las mismas coordenadas de X.

<div><div>Universidad Industrial de Santander</div><div></div><div>ESCUELA DE INGENIERIA Civil</div></div>	TRABAJO#	-	FECHA	01/10/2024
	ENTREGADO A	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	ASIGNATURA	ESTÁTICA		
	TEMA	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	Elaborado por	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		
MEMORIA DE CÁLCULO				

### Hallamos la carga de servicio de la cubierta

#### AREA CUBIERTA

$$A = 6m \times 5m + \frac{3m \times 5m}{2} = 37.5 m^2$$

#### CARGA DE SERVICIO DE LA CUBIERTA

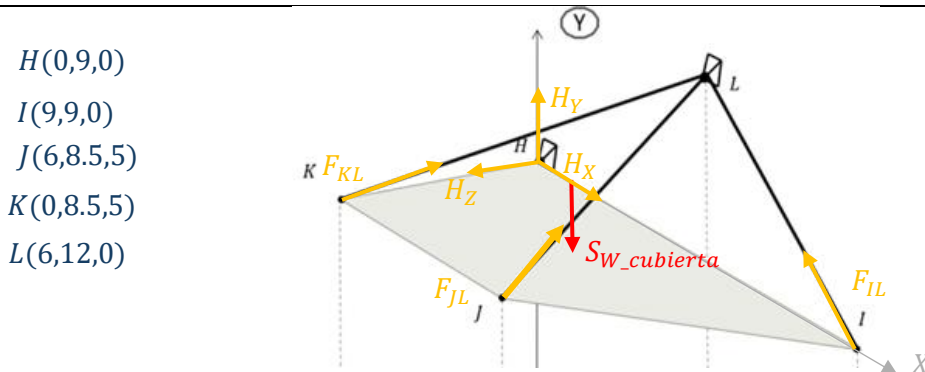
$$P_{serv\_cubierta} = 37.5 m^2 \times 1.13 \frac{KN}{m^2} = 42.375 KN$$

### 6.4. DCL

Realizamos el DCL para la cubierta en 3D y para el entrepiso en 2D. En la **Figura 4** se mostrará el DCL de la cubierta y en la **Figura 5** del entrepiso en 2D.

**Figura 4**

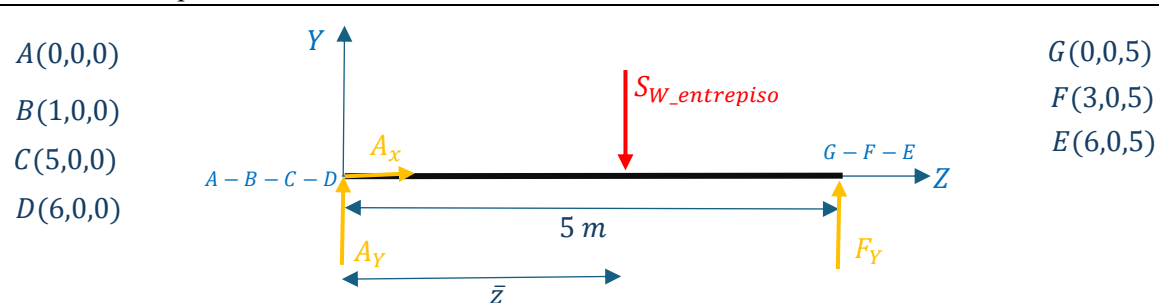
DCL de la cubierta en 3D



Nota. Reacciones en amarillo, fuerzas externas en rojo. Fuente: Autoría propia.

**Figura 5**


DCL del entrepiso en 2D



Nota. Reacciones en amarillo, fuerzas externas en rojo. Fuente: Autoría propia.

### 6.5. HALLAMOS CENTROIDE

Hallaremos el centroide del entrepiso y cubierta ya que en este punto es donde va a estar ubicada la carga puntual de peso propio “Sw” tanto del entrepiso como de la cubierta.

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

#### Centroidito cubierta (rectángulo)

$$\left( \frac{0+0+6+6}{4} = 3, \frac{9+9+8.5+8.5}{4} = 8.75, \frac{0+0+5+5}{4} = 2.5 \right)$$

#### Centroidito cubierta (triángulo)

$$\left( \frac{6+9+6}{3} = 7, \frac{9+9+8.5}{3} = 8.83, \frac{0+0+5}{3} = 1.67 \right)$$

Con las distancias centroidales y áreas de las dos figuras que componen nuestra estructura de estudio.

Procedemos a utilizar la ecuación  $\frac{\sum xA}{\sum A} = \bar{x}$  para hallar el centroide.

$$\bar{x} = \frac{30m^2 \times 3m + 7.5m^2 \times 7m}{30m^2 + 7.5m^2} = 3.8m$$

$$\bar{y} = \frac{30m^2 \times 8.75m + 7.5m^2 \times 8.83m}{30m^2 + 7.5m^2} = 8.77m$$

$$\bar{z} = \frac{30m^2 \times 2.5m + 7.5m^2 \times 1.67m}{30m^2 + 7.5m^2} = 2.33m$$

#### Centroidito Entrepiso (Sin hueco)

$$\left( \frac{0+0+6+6}{4} = 3, \frac{0+0+0+0}{4} = 0, \frac{0+0+5+5}{4} = 2.5 \right)$$

#### Centroidito Entrepiso (hueco)

$$\left( \frac{1+5}{2} = 3, \frac{0+0}{2} = 0, \frac{4 \times r}{3 \times \pi} = 0.85 \right)$$

Con las distancias centroidales y áreas de las dos figuras que componen nuestra estructura de estudio.

Procedemos a utilizar la ecuación  $\frac{\sum xA}{\sum A} = \bar{x}$  para hallar el centroide.

$$\bar{x} = \frac{30m^2 \times 3m - 6.28m^2 \times 3m}{30m^2 - 6.28m^2} = 3m$$



$$\bar{y} = \frac{30m^2 \times 0m - 6.28m^2 \times m}{30m^2 - 6.28m^2} = 0m$$

$$\bar{z} = \frac{30m^2 \times 2.5m - 6.28m^2 \times 0.85m}{30m^2 - 6.28m^2} = 2.94m$$

### 6.5. REALIZAMOS EQUILIBRIO 2D EN EL ENTREPISO

Teniendo en cuenta el DCL presentado en la **Figura 5**

$$S_{W\_entrepiso} = 30KN + P_{serv\_entrepiso} = 168.56KN$$

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Momentos respecto a el apoyo A.**

$$\sum M_A = 0 \quad F_Y \times 5m - S_{W_{entrepiso}} \times 2.94m = 0$$

$$F_Y = 99.11 \text{ KN} \quad \uparrow$$

Como dio positivo quiere decir que en la dirección que la dibujamos está bien.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F_Y - 168.56 = 0$$

#### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 3x3 los resultados se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} F_Y &= 99.11 \text{ KN} \quad \uparrow \\ A_y &= 69.45 \text{ KN} \quad \uparrow \\ A_x &= 0 \text{ KN} \end{aligned}$$

#### 6.6. REALIZAMOS EQUILIBRIO 3D EN LA CUBIERTA

Teniendo en cuenta el DCL presentado en la **Figura 4**

$$S_{W_{cubierta}} = 7 \text{ KN} + P_{serv_{cubierta}} = 49.375 \text{ KN}$$



**Cable  $F_{KL}$**

$$\overrightarrow{F_{KL}} = F_{KL} \times \widehat{U_{KL}}$$

$$\widehat{U_{KL}} = \frac{\vec{K} - \vec{L}}{KL} = \frac{[(6 - 0), (12 - 8.5), (0 - 5)]}{\sqrt{(6 - 0)^2 + (12 - 8.5)^2 + (0 - 5)^2}}$$

$$\widehat{U_{KL}} = \frac{(6, 3.5, -5)}{8.56} = (0.7, 0.41, -0.58)$$

$$\overrightarrow{F_{KL}} = F_{KL} \times (0.7, 0.41, -0.58)$$

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

**Cable  $F_{JL}$**

$$\vec{F}_{JL} = F_{JL} \times \hat{U}_{JL}$$

$$\hat{U}_{JL} = \frac{\vec{J} - \vec{L}}{JL} = \frac{[(6 - 6), (12 - 8.5), (0 - 5)]}{\sqrt{(6 - 6)^2 + (12 - 8.5)^2 + (0 - 5)^2}}$$

$$\hat{U}_{JL} = \frac{(0, 3.5, -5)}{6.1} = (0, 0.57, -0.82)$$

$$\vec{F}_{JL} = F_{JL} \times (0, 0.57, -0.82)$$

**Cable  $F_{IL}$**

$$\vec{F}_{IL} = F_{IL} \times \hat{U}_{IL}$$

$$\hat{U}_{IL} = \frac{\vec{I} - \vec{L}}{IL} = \frac{[(6 - 9), (12 - 9), (0 - 0)]}{\sqrt{(6 - 9)^2 + (12 - 9)^2 + (0 - 0)^2}}$$

$$\hat{U}_{IL} = \frac{(-3, 3, 0)}{4.24} = (-0.71, 0.71, 0)$$

$$\vec{F}_{IL} = F_{IL} \times (-0.71, 0.71, 0)$$

**Peso propio de la cubierta ( $\vec{S}_{W\_cubierta}$ )**

$$\vec{S}_{W\_cubierta} = (0, -49.375, 0)$$

**Vectores posición**



$$\vec{HK} = [(0 - 0), (8.5 - 9), (5 - 0)] = (0, -0.5, 5)$$

$$\vec{HJ} = [(6 - 0), (8.5 - 9), (5 - 0)] = (6, -0.5, 5)$$

$$\vec{HI} = [(9 - 0), (9 - 9), (0 - 0)] = (9, 0, 0)$$

$$\vec{HG1} = [(3.8 - 0), (8.77 - 9), (2.33 - 0)] = (3.8, -0.23, 2.33)$$

Finalmente realizamos momento en H respecto a cada una de las fuerzas.

  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

### Momentos respecto a H

$$\sum \vec{M}_H = \overrightarrow{HK} \times \overrightarrow{F_{KL}} + \overrightarrow{HJ} \times \overrightarrow{F_{JL}} + \overrightarrow{HI} \times \overrightarrow{F_{IL}} + \overrightarrow{HG1} \times \overrightarrow{S_{W\_cubierta}}$$

$$\sum \vec{M}_H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -0.5 & 5 \\ F_{KL}0.7 & F_{KL}0.41 & -F_{KL}0.58 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -0.5 & 5 \\ 0 & F_{JL}0.57 & -F_{JL}0.82 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 0 & 0 \\ -F_{IL}0.71 & F_{IL}0.71 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3.8 & -0.23 & 2.33 \\ 0 & -49.375 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_H = (-1.76F_{KL} - 2.44F_{JL} + 115.044)i + (3.5F_{KL} + 4.92F_{JL})j + (0.35F_{KL} + 3.42F_{JL} + 6.39F_{IL} - 187.625)k$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio

### Equilibrio en 3D

$$\sum M_x = 0 \rightarrow -1.76F_{KL} - 2.44F_{JL} + 115.044 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow 3.5F_{KL} + 4.92F_{JL} = 0$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow 0.35F_{KL} + 3.42F_{JL} + 6.39F_{IL} - 187.625 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_x + F_{KL}0.7 - F_{IL}0.71 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow H_y + F_{KL}0.41 + F_{JL}0.57 + F_{IL}0.71 - 49.375 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow H_z - F_{KL}0.58 - F_{JL}0.82 = 0$$

### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 6x6 los resultados se presentan a continuación:

$$F_{KL} = 4748.46 \text{ KN}$$


$$F_{JL} = -3377.97 \text{ KN}$$

$$F_{IL} = 1577.2 \text{ KN}$$

$$H_y = -1091.86 \text{ KN}$$

$$H_x = -2204.089 \text{ KN}$$

$$H_z = -15.83 \text{ KN}$$

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

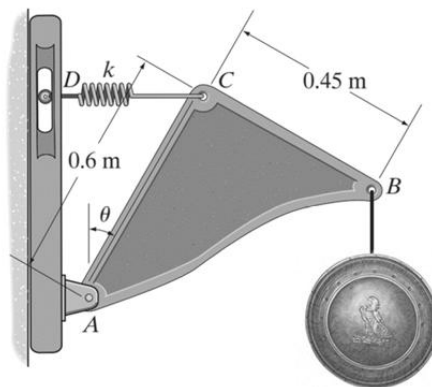
## EJERCICIO 7

El resorte CD ( $k = 1.5 \frac{kN}{m}$ ) permanece en la posición mostrada cuando el sistema completo alcanza el equilibrio ante la aplicación de un peso de  $300 N$  en B. Si considera que la posición inicial del resorte se presenta cuando el ángulo  $\theta = 0^\circ$ , determine:

- La inclinación de la placa ( $\theta$ ) para lograr el equilibrio.
- Las reacciones en el apoyo A y D. ¿Qué tipos de apoyos son?

**Figura 1**

Estructura ABC



Nota. BENJUMEA, José. BUELVAS, Homer. ESTÁTICA: PROBLEMAS PARA PARCIALES 2013-2016

## Solución 7

### 7.1. Identificación de apoyos

Interpretando el ejercicio nos damos cuenta de que el ejercicio a realizar se trata de una estructura isostática en 2D debido a que tiene un resorte (apoyo simple) en C, así como un apoyo articulado en el punto A. Además, podemos observar que el ejercicio perfectamente se puede analizar en 2D, ya que la estructura se contiene en un mismo plano.



Realizando el GIE en 2D:

- 1 resorte (1 reacción)
- Articulación (2 reacciones)

$$GIE_{2D} = 3 - 3 = 0$$

Por lo que podemos clasificar la estructura como Isostática en 2D y podemos observar en la **Figura 2** que está restringida completamente. Ya que tiene restricciones de movimiento (reacciones) en todos sus ejes. Además, teniendo en cuenta que en el enunciado del ejercicio nos piden que debemos hallar el ángulo para que la estructura este en equilibrio, podemos usar esto a favor para hallar primero la fuerza que necesitaría el resorte para mantener el equilibrio y posterior a ello hallamos la elongación para saber que ángulo es el necesario para ese equilibrio.



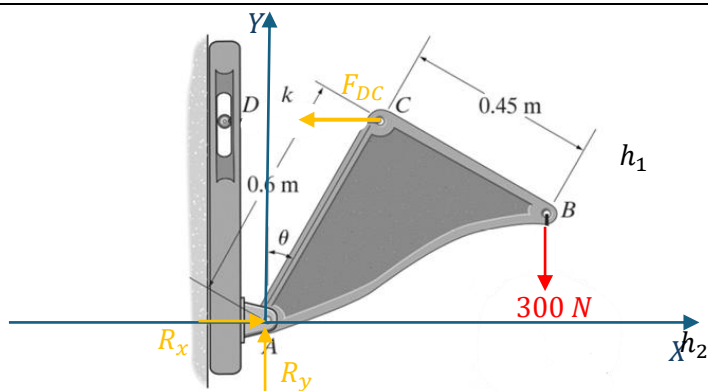
  <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

## 7.2. DCL

Realizamos el DCL del ejercicio en 2D ya que la estructura se encuentra contenida en el plano XY. En la **Figura 2** se mostrará el DCL del cuerpo en estudio.

**Figura 2**

DCL en 2D



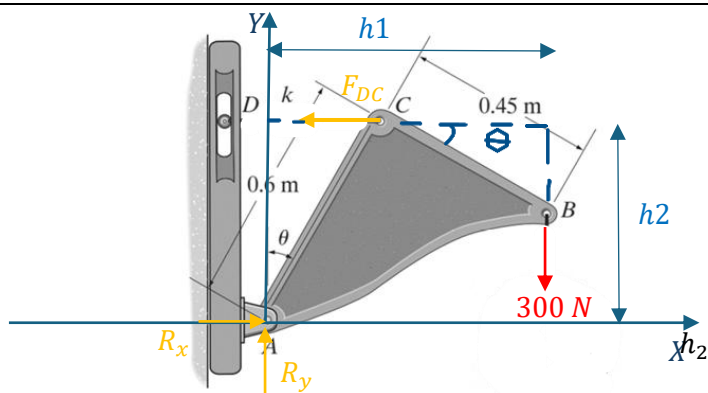
Nota. Reacciones en amarillo, fuerzas externas en rojo. Fuente: Autoría propia.

## 7.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO


Antes de realizar equilibrio estático debemos definir el punto donde vamos a realizar momentos. En este caso vamos a realizar momentos en el punto A debido a que es el apoyo más crítico. Además, vamos a realizar el equilibrio dejando todas las distancias en términos del ángulo.

**Figura 3**

DCL en 2D



Nota. Fuente: Reacciones en amarillo, fuerzas externas en rojo. Fuente: Autoría propia.

 <b>MEMORIA DE CÁLCULO</b>	<b>TRABAJO#</b>	-	<b>FECHA</b>	01/10/2024
	<b>ENTREGADO A</b>	ESTUDIANTES DE ESTÁTICA		
	<b>ASIGNATURA</b>	ESTÁTICA		
	<b>TEMA</b>	EQUILIBRIO 2D Y 3D		
	<b>Elaborado por</b>	(Formato Original Jhan Carlos Matajira Figueroa)		

$$h_1 = 0.6 \times \sin(\theta) + 0.45 \times \cos(\theta)$$

$$h_2 = 0.6 \times \cos(\theta)$$

$$F_{DC} = k \times x$$

$$F_{DC} = 1.5 \frac{KN}{m} \times 0.6 \times \sin(\theta)$$

**Momentos respecto al punto A.**

$$\sum M_A = 0 \quad F_{DC} \times h_2 - 0.3 \text{ KN} \times h_1 = 0$$

$$1.5 \frac{KN}{m} \times 0.6 \times \sin(\theta) \times 0.6 \times \cos(\theta) - 0.3 \times [0.6 \times \sin(\theta) + 0.45 \times \cos(\theta)] = 0$$

$$\theta = 23.1^\circ$$

$$F_{DC} = 1.5 \frac{KN}{m} \times 0.6 \times \sin(23.1) = 0.3531 \text{ KN}$$

Realizamos sumatoria de fuerzas en x y y para hallar las demás reacciones.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_x - F_{DC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y - 0.3 \text{ KN} = 0$$

### Hallando las reacciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 3x3 los resultados se presentan a continuación:

$$\theta = 23.1^\circ \text{ KN}$$

$$R_y = 0.3 \text{ KN} \uparrow$$

$$R_x = 0.3531 \text{ KN} \rightarrow$$